1. मात्रक मापन तथा त्रुटि विश्लेषण

भौतिक राशियाँ :- वे सभी राशियाँ जिनका सम्बन्ध किसी भौतिकीय परिघटना से हो तथा उन्हें संख्या द्वारा व्यक्त किया जाए और साथ-साथ प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप में मापा जा सके भौतिक राशियाँ कहलाती है।

जैसे : लम्बाई , द्रव्यमान , समय, दाब, ताप, चाल, बल, वेग आदि ।

मूल राशियाँ :- विज्ञान में समस्त राशियों को **लम्बाई, द्रव्यमान , समय, ताप, ज्योतितीव्रता, विद्युत धारा** के पदो में मापा जाता है। ये राशियाँ मूल राशियाँ कहलाती है।

मापन :- मापन वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा हम ज्ञात करते है कि कोई दी हुई राशि किसी मानक राशि का कितने गुना है।

मात्रक :- वह सर्वमान्य मानक जिसका उपयोग किसी भौतिक राशि की तुलना के लिए किया जाता है। उस भौतिक राशि का मात्रक कहलाता है।

जैसे: 1. लम्बाई का मात्रक ⇒ मीटर

2. द्रव्यमान का मात्रक ⇒ किलो ग्राम

3. समय का मात्रक ⇒ सेकण्ड

मापन की प्रणालियाँ :- भिन्न-भिन्न स्थानों पर मापन की अलग-अलग प्रणालियाँ प्रयोग करते हैं जो निम्न प्रकार हैं।

1. M.K.S. प्रणाली (Metric System) :- इस प्रणाली में लम्बाई को मीटर, द्रव्यमान को किलोग्राम, तथा समय को सेकण्ड में मापते हैं।

2. C.G. S. प्रणाली (French system) :- इस प्रणाली में लम्बाई को सेमी, द्रव्यमान को ग्राम में तथा समय को सेकण्ड में मापते हैं।

3. F.P.S. प्रणाली (British system) :- इस प्रणाली में लम्बाई को फुट में, द्रव्यमान को पौंड में तथा समय को सेकण्ड में मापते हैं।

मापन की अन्तराष्ट्रीय प्रणाली [The S.I. System of Unit] :-

मापन की यह प्रणाली अन्तराष्ट्रीय स्तर पर मान्य हैं। संकेत रूप से इसे S.I प्रणाली कहते हैं। जब S.I का अर्थ "सिस्टम इंटरनेशनल डि यूनिट्स" System International 'd' units होता है।

यह प्रणाली सर्वप्रथम सन् 1971 मे माप तौल के महा सम्मेलन के बाद प्रकाश मे आयी थी । यह प्रणाली अन्तराष्ट्रीय माप तौल सम्मेलन में समय-समय पर की जाने वाली संस्तुतियो पर (Recommendation) पर आधारित हो गई हैं।

S.I प्रणाली मे सात मूल मात्रक होते हैं।

राशियाँ	मात्रक
लम्बाई	मीटर
द्रव्यमान	किलोग्राम
समय	सेकण्ड
ताप	कैल्विन
विद्युतधारा	ऐम्पियर
पदार्थ की मात्रा	मोल
ज्योतितीव्रता	कैण्डिला

इसमें दो पूरक मात्रक "रेडियन" तथा "स्टेरेडियन" दो मात्रक शामिल होते हैं।

∴ S.I. पद्धति में कुल मात्रक = मूल मात्रक + पूरक मात्रक

= 07 + 02

= 9

S.I. पद्धति में मूल राशियों तथा मूल मात्रकों की सारणी:-

मूल राशियों	मूल मात्रक	प्रतीक
लम्बाई	मीटर	M
द्रव्यमान	किलोग्राम	KG
समय	सेकण्ड	S
ताप	कैल्विन	K
विद्युत धारा	ऐम्पियर	A
पदार्थ की मात्रा	मोल	N_A
ज्योतितीव्रता	कैण्डिला	cd

लम्बाई का मापन

1. अत्यन्त छोटी दूरियों का मापन :- बहुत सूक्ष्म जैसे (अणुओं का व्यास, परमाणुओं का आकार) मापने के लिए विशेष विधि का उपयोग किया जाता है। जिनमें से कुछ विधियाँ इस प्रकार हैं।

(a) आवोगाद्रो परिकल्पना के उपयोग द्वारा परमाणु की त्रिज्या की गणना :- पदार्थ में परमाणु प्रबल आकर्षक बलों द्वारा बधे रहते हैं। आवोगाद्रो के अनुसार- "पदार्थ के 1 ग्राम परमाणु 6.023×10^{23} परमाणु होते हैं। ये परमाणु पदार्थ का लगभग 2/3 आपतन घेरते हैं।

माना पदार्थ का द्रव्यमान = m

पदार्थ का परमाणु भार = M

पदार्थ द्वारा घेरा गया आयतन = V

तथा माना परमाणु की त्रिज्या= r

तथा आवोगाद्रो की संख्या = N है।

अतः

1 ग्राम पदार्थ में परमाणुओं की संख्या = N/M

$\therefore$ m ग्राम पदार्थ में परमाणुओं की संख्या= $m[\frac{N}{M}]$

एक परमाणु द्वारा घेरा गया आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ पदार्थ के सभी परमाणुओं द्वारा घेरा गया

आयतन = $m[\frac{N}{M}] \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$\because$ परमाणु पदार्थ का $\frac{2}{3}$ आयतन घेरते हैं।

$\therefore$ घेरा गया कुल आयतन $= \frac{2}{3}V$

$$\therefore m[\frac{N}{M}] \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}V$$

$$m[\frac{N}{M}] \times 2\pi r^3 = V$$

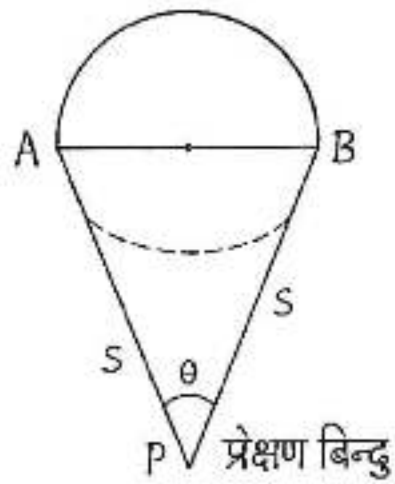
$$\text{या } r^3 = \frac{Vm}{2\pi mN}$$

$$r = [\frac{Vm}{2\pi mN}]^{1/3}$$

जहाँ आयतन = V, परमाणु भार = M, पदार्थ का द्रव्यमान = M, तथा आवोगाद्रो संख्या = N ज्ञात है। तो इसके माध्यम से परमाणु की त्रिज्या ज्ञात की जाती है।

2. अत्यन्त बड़ी दूरियों का मापन :- बहुत बड़ी दूरियाँ जैसे - "पर्वत की ऊँचाई, चन्द्रमा की पृथ्वी से दूरी " आदि का मापन कुछ प्रमुख विधियों से करते हैं। ऐसे मापन ये कोणीय माप के सहायक होते हैं;

(a) चन्द्रमा के व्यास की गणना :- माना पृथ्वी तल पर प्रेक्षण बिन्दु P है। यदि चन्द्रमा को दुरदर्शी द्वारा देखा जाये तो दुरदर्शी में चन्द्रमा का प्रतिबिम्ब एक वृत्तीय चकती के रूप में बनता है।



माना प्रेक्षण बिन्दु P पर चन्द्रमा के व्यास AB द्वारा बना कोण θ है।

माना चन्द्रमा का रेखीय व्यास = D

पृथ्वी की चन्द्रमा से माध्य दूरी = S

∵ हम जानते हैं

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

∵ चाप AB = D

त्रिज्या PA = PB = S

∴ कोण $(\theta) = \frac{D}{S}$

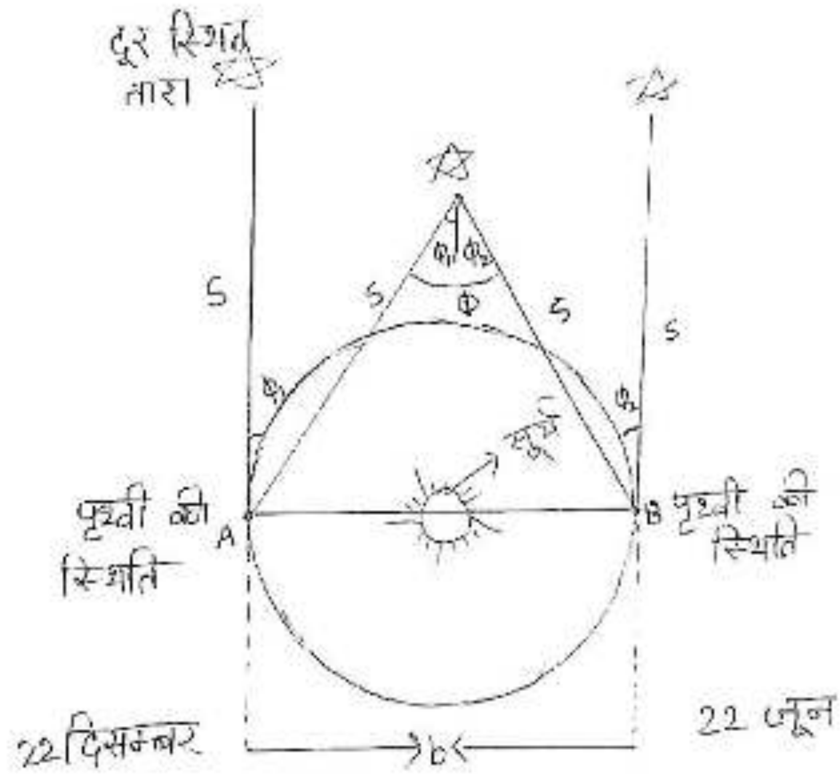
या

$$D = S\theta$$

S ज्ञात होने पर कोण θ को मापकर व्यास चन्द्रमा का व्यास D ज्ञात किया जा सकता है।

(b) लम्बन विधि द्वारा खगोलीय पिण्डों की दूरी ज्ञात करना :-

कुछ समीपवर्ती तारों (दूरी लगभग 100 प्रकाश वर्ष से कम) की पृथ्वी से दूरियाँ लम्बन विधि से ज्ञात कर सकते हैं। माना एक तारा S की दूरी पृथ्वी से ज्ञात करनी हैं। माना एक अन्य दूर स्थित तारा N स्थित तारा है।



माना 22 दिसम्बर को पृथ्वी की स्थिति A पर है।

अतः 6 माह बाद :- 22 जून को पृथ्वी की स्थिति B पर हो जाती है।

तारे N तथा S बीच का कोंण ϕ_1 है। (22 दिसम्बर को)

तथा N व S के बीच का कोण ϕ_2 है। (22 जून को)

$\because$ दोनों कोणों का योग $\phi = \phi_1 + \phi_2$

कोण ϕ को तारे का लम्बन कोण कहते है।

$\therefore$ हम जानते है।

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप } (AB)}{\text{पूरी } SA \text{ या } SB}$$

चित्रानुसार.

त्रिज्या SA = SB = तारे

S की पृथ्वी से दूरी = S

$$\therefore \quad \phi = \frac{AB}{S}$$

या $\phi = \frac{b}{s}$

या $S = \frac{b}{\phi}$

जहाँ b = सूर्य के परितः पृथ्वी की कक्षा का व्यास = लगभग 2Au.

1Au(Astronomical unit) = 1.5×10^{11} मीटर

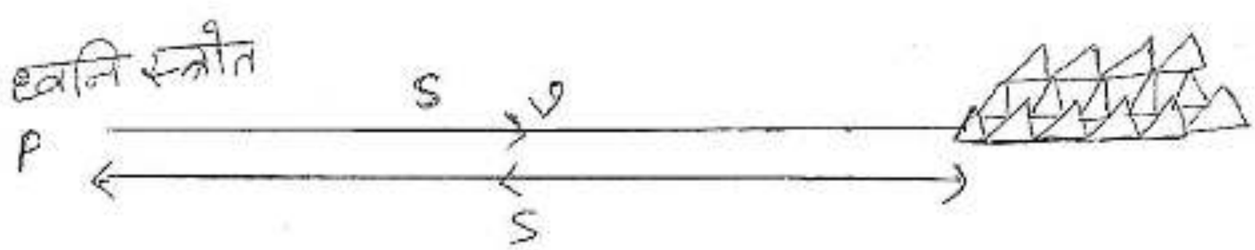
$b = 2$ Au

$b = 2 \times 1.5 \times 10^{11}$ मी

$b = 3 \times 10^{11}$

लम्बन कोण ϕ (रेडियन) में मापकर दूरी S की गणना कर सकते हैं।

(c) प्रतिध्वनि विधि अथवा परावर्तन विधि द्वारा बड़ी दूरी की गणना :- किसी दूर स्थित पहाडी से सीधे परिवर्तन के आने के बाद आने वाली ध्वनि को प्रतिध्वनि कहते हैं। इस विधि से दूर स्थित पहाडी की दूरी ज्ञात की जा सकती हैं।



इस विधि में बन्दूक से दूर स्थित पहाडी की ओर छोडते हैं। गोली के छोड़ने तथा प्रतिबिम्ब या प्रतिध्वनि के सुनने के बीच के क्षणों का अन्तराल ज्ञात कर लेते है।

माना यह समयन्तराल t है।

माना ध्वनि की चाल v है।

ध्वनि द्वारा तय की गई कुल दूरी $= S + S = 2S$

हम जानते है

दूरी = चाल × समय

$2S = V.t$

$2S = V.t$

$$S = \frac{vt}{2}$$

(d) पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी ज्ञात की करने की लेजर (Laser) विधि :- लेजर का अर्थ "Light Amplification by stimulated Emission of Radiation" है इसका हिन्दी अर्थ " विकरण के उद्दीप्त उत्सर्जन द्वारा प्रकाश का प्रवर्धन " है।

यह विधि प्रकाश के परावर्तन पर आधारित है। लेजर प्रकाश अत्यधिक तीव्रता वाला एक दैशिक तथा एक वर्णी प्रकाश है। यह प्रकाश एक सरल रेखा में बहुत अधिक दूरी तय कर सकता है। लेजर पुंज को चन्द्रमा की ओर भेजा जाता है। चन्द्रमा से परावर्तित यह प्रकाश पृथ्वी पर लौट आता है। लेजर पुंज के पृथ्वी से चन्द्रमा तक जाने तथा चन्द्रमा से पृथ्वी तक वापिस आने तक का समय नोट कर लेते हैं।

माना पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी = S

समतल में गति

1. एक समान सदिश :- ऐसे सदिश जिनके परिमाण तथा दिशा समान होते है एक समान या समतुल्य सदिश कहलाते है।

उदाहरण : $\vec{A} = \vec{B}$

2. असमान सदिश :- ऐसे सदिश जिनकी दिशा तो समान व परिमाण अलग- अलग होते हैं। असमान सदिश कहलाते हैं।

उदाहरण : $\vec{A} \neq \vec{B}$ परंतु $\widehat{A} = \widehat{B}$ और $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

शून्य सदिश :- ऐसें सदिश जिनका परिमाण शून्य होता हैं। शून्य सदिश कहलाते हैं।

1. किसी सदिश मे शून्य सदिश की गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता हैं।

उदाहरण : $\vec{A} . \vec{0} = \vec{0}$

2. यदि किसी सदिश मे शून्य सदिश जोड़ने पर सदिश राशि अपरिवर्तित रहती हैं।

उदाहरण : $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

3. यदि दो विपरित सदिशो को आपस मे जोड़ा जाए तो शून्य सदिश ही प्राप्त होता है।

उदा० : $\vec{A} = -\vec{B}$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$$

$$-\vec{B} + \vec{B} = \vec{0}$$

5.यदि किसी शून्य सदिश में किसी संख्या की गुणा कर दें तो शून्य सदिश ही प्राप्त होता है।

उदा० : $n \cdot \vec{0} = \vec{0}$ { जहाँ $n = 1,2,3,4,5,6,7$-------- }

विपरित सदिश :- ऐसें सदिश जिनकें परिमाण तो समान व दिशा विपरित सदिश कहलाते है।

उदा० : $\vec{A} = -\vec{B}$

एकांक सदिश :- ऐसा सदिश जिनका परिमाण एक या एकांक हो। एकांक सदिश कहलाता है।

एकांक सदिश को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर के उपर केप लगाकर व्यक्त करते हैं।

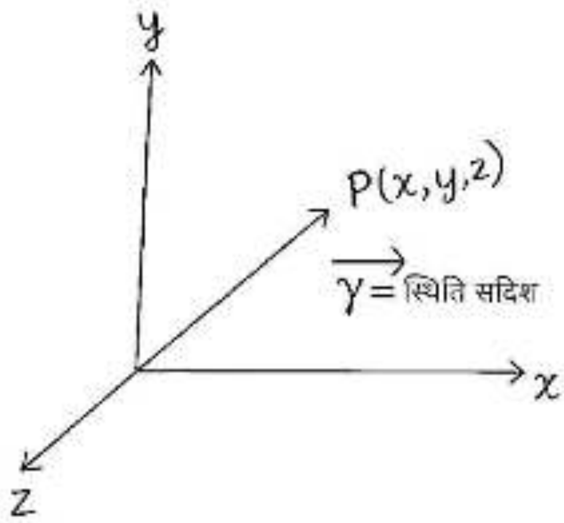
किसी सदस्यर को उसको परिमाण से भाग देने पर एकांक सदिश प्राप्त होता है।

माना किसी सदिश $\vec{r}$ का परिमाण = $|\vec{r}|$ या r है

तो एकांक सदिश $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

एकांक सदिश की दिशा सदिश राशि के समानांतर होती है।

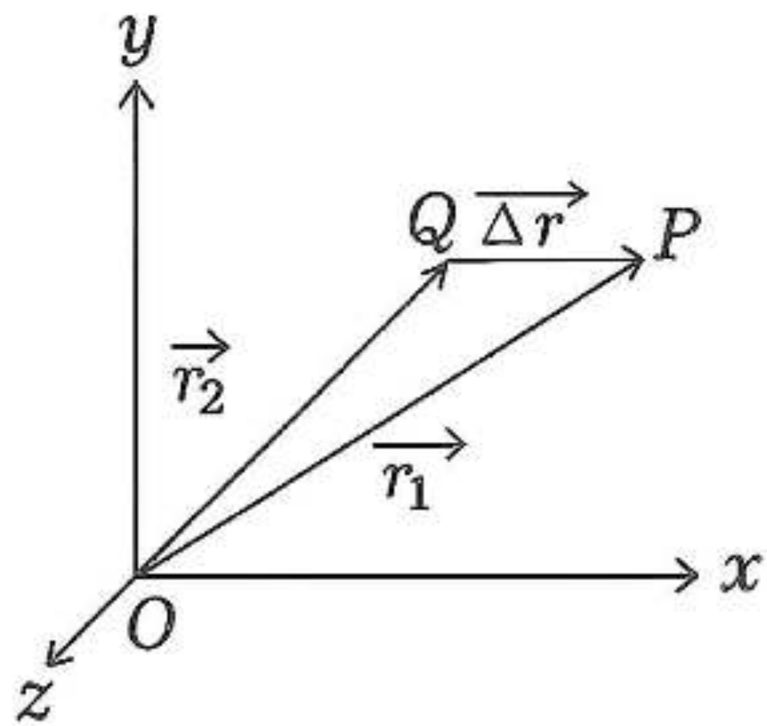
स्थिति सदिश :-



मूल बिन्दु से किसी कण की स्थिति को स्थिति सदिश की सहायता से व्यक्त करते हैं।

जैसे चित्र के मूल बिन्दु 0 से किसी कण P की स्थिति को स्थिति सदिश $\vec{OP} = \vec{r}$ से निरूपित किया।

विस्थापन सदिश :-

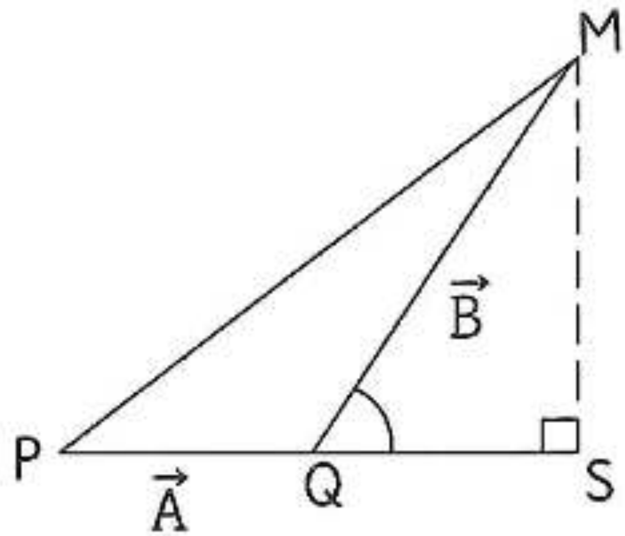


यदि किसी क्षण t पर कण P की मूल बिन्दु O से स्थिति $\vec{r}_1$ है। तथा क्षण t' पर कण की स्थिति $\vec{r}_2$ हो जाती है। कणो की स्थिति का अन्तर विस्थापन सदिश कहलाता है। इसे $\vec{\Delta r}$ से व्यक्त करते है।

$$\vec{r}_1 + \vec{\Delta r} = \vec{r}_2$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

सदिश राशियों का संकलन (जोड़ना): गणितीय तिथि



माना दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ को सीधे क्रम मे जोड़ा गया है। त्रिभुज के नियमानुसार इन सदिशो को विपरित क्रम में जोड़ने वाली भुजा सदिशो के परिमाण को व्यक्त करती है। सदिशो का परिणामी भी सदिश होता है। रेखा PQ को आगे बढ़ाते है तथा बिन्दु M से उसके ऊपर एक लम्ब डालते है। समकोण $\triangle PMS$ में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

इसलिए $PS = PQ + QS$ ......(1)

$PM^2 = (PQ + QS)^2 + (MS)^2$ {समीकरण 1 से}

इसलिए $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$PM^2 = PQ^2 + QS^2 + 2PQ \cdot QS + MS^2$ ......(2)

$\triangle QMS$ मे

$$Sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$Sin\theta = \frac{MS}{QM}$$

$$MS = QM \, . \, Sin\theta$$

$$MS = \vec{B} \quad Sin\theta$$

$$Cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$Cos\theta = \frac{QS}{QM}$$

$$QS = QM \, . \, Cos\theta$$

$$QS = \vec{B} \;\; Cos\theta$$

समीकरण 2 में PQ, QS तथा MS के मान रखने पर

$$\vec{R}^2 = \vec{A}^2 + (\vec{B}\; Cos\theta)^2 + 2\vec{A}.\vec{B}\; Cos\theta + (\vec{B}\; Sin\theta)^2$$

$$\vec{R}^2 = \vec{A}^2 + 2\vec{A}\;\vec{B}\; Cos\theta + (\vec{B}\; Cos\theta)^2 + (\vec{B}\; Sin\theta)^2$$

$$\vec{R}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2\,(\,Cos^2\theta + Sin^2\theta\,) + 2\vec{A}\;\vec{B}\; Cos\theta$$

$$\vec{R}^2 = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2\,(Cos^2\theta + Sin^2\theta) + 2\vec{A}\,\vec{B}\,Cos\theta}$$

$$\vec{R}^2 = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + (1)\; 2\vec{A}\,\vec{B}\,Cos\theta}$$

$$\vec{R} = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\vec{A}\,B\,Cos\theta}$$

विशेष स्थितियाँ →

1.यदि $\theta = 0^o$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABCos\theta}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABCos0}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB(1)}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB}$$

इसलिए $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

$$R = \sqrt{(A+B)^2}$$

$$R_{max} = (A+B)$$

यदि दोनों सदिश समान दिशा मे होगें तो उनका परिणामी अधिकतम होगा।

2. यदि $\theta = 90^\circ$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos\theta}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos90^\circ}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB(0)}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

3. यदि $\theta = 180^\circ$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos\theta}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos180^\circ}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB(-1)}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$$

इसलिए $(A-B)^2 = A^2 - B^2 - 2AB$

$$R = \sqrt{(A - B)^2}$$

$$R_{min} = (A - B)$$

प्रक्षेप्य गति :- यदि किसी वस्तु को आकाश मे निश्चित वेग से फेफा जाए तथा वस्तु पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर गति करे तो फेकी गयी वस्तु प्रक्षेप्य तथा वस्तु की गति कहलाती है।

उदा :- हवा में फेफी गयी गेंद की गति

फुटबॉल की गति आदि वस्तु की प्रक्षेप्य गति का सर्वप्रथम उल्लेख वैज्ञानिक गॅलिलियों ने किया था। इन्होंनें अपने लेख मे प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज एवं उध्र्वाधिर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था।

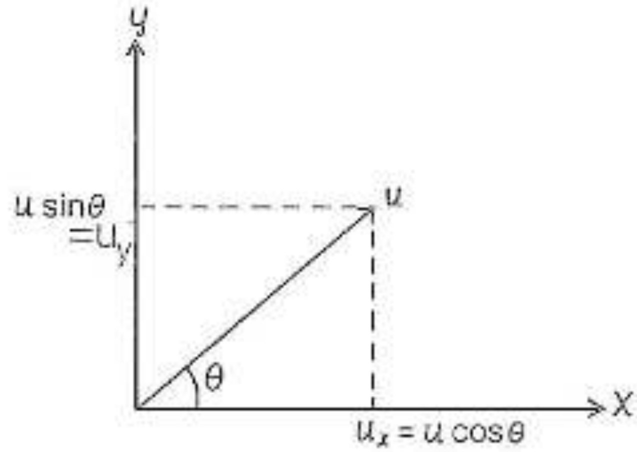
प्रक्षेप्य गति का अध्ययन सरलतापूर्वक करने के लिए निम्न दो अभिधारणाए दी गयी:-

1. गुरुत्वीय त्वरण का नाम नियत व दिशा उध्र्वाधिर नीचें की ओर होनी चाहिए।
2. वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानना चाहिए।

प्रक्षेप पथ :- $u_y = u \sin\theta$

$u_x = u \ Cos\theta$

माना कोई प्रक्षेप्य θ कोण पर u वेग से उध्र्वाधिर दिशा मे फेंका गया है।



फेंकी गयी वस्तु में गुरुत्व के कारण लगने वाले त्वरण की दिशा सदैव नीचें की ओर होता है।

वस्तु फें प्रारम्भिक वेग के निम्न घटक होंगें
1. क्षेतिज घटक $u_x = u \ cos\theta$ ....(1)
2. उध्र्वाधिर घटक $u_y = u \ sin\theta$ ....(2)

वस्तु मे उत्पन्न त्वरण के घटक निम्न प्रकार होगें-
1. क्षेतिज घटक $u_x = 0$
2. उध्र्वाधिर घटक $u_y = g$

गति के प्रथम समीकरण सें

$$v = u + at$$

क्षैतिज तल मे गति के लिए

दूरी = चाल × समय

$S_x (x) = u_x t$ (इसलिए $u_x = u \cos\theta$)

$S_x (x) = u \cos\theta \, t$ ......(3)

या $t = \frac{s(x)}{u \cos\theta}$ ....(4)

उर्ध्वाधर गति के लिए-

$S_y (y) = u_y t - \frac{1}{2} g t^2$ ......(5) (इसलिए $a_y = -g$)

गति के प्रथम समीकरण से

$V = u + at$

$V_y = u_y - gt$

$V_y = u \sin\theta - gt$

प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई →

माना प्रक्षेप्य को अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने में t_1 समय लगता है।

$V_y = u_y + a_y . t$ {इसलिए $V_y = 0$ }

दिया है, $u_y = u\sin\theta$

$a_y = -g$

$t = t_1$

तब $0 = u\sin\theta - gt_1$

$gt_1 = u\sin\theta$

$t_1 = \frac{u\sin\theta}{g}$ ....(i)

$\{ s = ut + \frac{1}{2} at^2 \}$

$H_{max} = u_y t_1 - \frac{1}{2} g t_1^{\,2}$ ....(ii)

समीकरण (ii) में समीकरण (i) से t का मान रखने पर

$H_{max} = u sin\theta . \frac{u sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{u sin\theta}{g}\right)^2$

$H_{max} = u^2 \, Sin^2\theta . \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2} g . \frac{1}{g^2} \right)$

$H_{max} = u^2 \, Sin^2\theta \, . \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2g} \right)$

$H_{max} = \frac{u^2 sin^2\theta}{2g}$

स्थिति-I यदि $\theta = 90°$ हो तो

$H_{max} = u^2 \left(\frac{sin 90 \, x \, sin 90}{2g} \right)$

$H_{max} = \frac{v^2}{2g}$ {क्योंकि $Sin 90° = 1$}

प्रक्षेप्य काल या उड्डयन काल :- चूँकि वस्तु गुरुत्व के अधिन गति कर रही है। अतः वस्तु को जितना समय ऊपर जाने में लगता है, ठीक उतना ही समय नीचे आने मे लगेगा।